

УДК 512.552.1

НЕТЕРОВІ БІРЯДНІ КІЛЬЦЯ З СИЛЬНОЗВ'ЯЗНИМ САГАЙДАКОМ.

Ю. В. Яременко, Ю.М.Демченко.

Описано нетерові бірядні кільця з чотирьохточковим сильнозв'язним сагайдаком.

The noetherian biserial rings with four-dotted closely connected quiver are described in the article.

В статті розглядаються асоціативні кільця з $l \neq 0$.

Бірядні кільця є важливим узагальненням добре відомих напівланцюгових кілець. Напівланцюгові кільця є напівдосконалими кільцями, над якими всі нерозкладні праві й ліві проективні модулі мають лінійну структуру підмодулів. Ці кільця характеризуються тим, що над ними всі скінченно зображувані модулі напівланцюгові. Цей клас кілець має безпосереднє використання в деяких питаннях лінійної алгебри і теорії абелевих груп.

Артинові бірядні кільця ввів Фуллер [1] в зв'язку з вивченням кілець дистрибутивного модульного типу. В роботі [2] поняття бірядного кільця перенесено на напівдосконалі кільця.

Нагадаємо, що кільце A називається **напівдосконалим**, якщо факторкільце A/R артинове і ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона R [3].

Ідемпотенти можна піднімати за модулем R , якщо для будь-якого елемента $u \in A$, для якого $u^2 - u \in R$ існує елемент $e^2 = e \in A$ такий, що $e - u \in R$ (тобто існує ідемпотент в кільці A конгруентний з u за модулем R).

Теорема 1 [4]. *Кільце A напівдосконале тоді і тільки тоді, коли $1 \in A$ розкладається в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів.*

Нехай $1 = e_1 + \dots + e_n$ – розклад одиниці кільця A в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів і $a = 1a1 = (e_1 + \dots + e_n)a(e_1 + \dots + e_n) =$

$$= \sum_{i,j=1}^n e_i a e_j.$$

Неважко перевірити, що це розклад кільця A в пряму суму

абелевих груп $e_i A e_j$ ($i, j = 1, \dots, n$). Елементи із $e_i A e_j$ ми будемо позначати через a_{ij} . Будь-який елемент $a \in A$ зручно записувати у вигляді матриці (a_{ij}) . Кільце A зображується таким чином у вигляді кільця матриць з елементами із $A_{ij} = e_i A e_j$ з звичайними операціями додавання і множення. Таке представлення називається **двостороннім пірсовським розкладом кільця A** [5, с.31].

Модуль M називається **бірядним**, якщо він дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі K_1 і K_2 (можливо й рівні нулеві) такі, що $K_1 + K_2 = M$, або найбільший власний підмодуль в M , а $K_1 \cap K_2 = 0$, або простий модуль [2].

Напівдосконале кільце A називається **бірядним кільцем**, якщо кожний правий і кожний лівий головний A модуль бірядний [2].

Теорема 2 [2]. Нехай e – довільний ідемпотент бірядного кільця A . Тоді eAe являється бірядним кільцем.

Напівдосконале кільце A з радикалом Джекобсона R називається **зведеним**, якщо A/R є прямим добутком тіл [6].

За теоремою Моріти [7] категорія модулів над довільним напівдосконалим кільцем натурально-еквівалентна категорії модулів над зведеним кільцем. Тому при вивченні напівдосконалих кілець можна обмежитись зведеними кільцями.

Означення. Нехай A – нетерове справа напівдосконале кільце з радикалом Джекобсона R . P_1, \dots, P_s – всі попарно неізоморфні проективні нерозкладні A -модулі. Позначимо $P(P_i R)$ – проективне накриття модуля $P_i R$. Тоді

$$P(P_i R) = \bigoplus_{j=1}^s P_j^{t_{ij}} \quad (i, j = 1, \dots, s).$$

Поставимо у відповідність модулям P_1, \dots, P_s точки $1, \dots, s$ і сполучимо точку i з точкою j t_{ij} – стрілками. Отриманий граф називається сагайдаком нетерова справа напівдосконого кільця A [6]. Позначимо його $K(A)$.

Теорема 3 [8]. Нехай A – нетерове бірядне кільце. Тоді із кожної точки сагайдака кільця A виходить не більше двох стрілок, в кожену точку сагайдака кільця A входить не більше двох стрілок, причому із однієї точки в другу (можливо й співпадаючу з першою) іде не більше однієї стрілки. Навпаки, якщо є скінченний граф, який задовольняє ці умови, то існує бірядне кільце, сагайдаком якого являється цей граф.

Лема 1 [8]. Якщо із точки сагайдака нетерового бірядного кільця виходить одна стрілка, то головний модуль, що відповідає цій точці – ланцюговий.

Розглянемо нетерові бірядні кільця, сагайдаки яких складаються з 4-х точок.

Тоді розклад одиниці кільця A у суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів матиме вигляд: $1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Позначимо $P_i = e_i A$, $Q_i = A e_i$, $U_i = P_i / P_i R$, $V_i = Q_i / R Q_i$, $A_{ij} = e_i A e_j$, R_i – радикал Джекобсона кільця A_{ii} , $i, j = 1, \dots, 4$.

За теоремою 2, і теоремами 10.5 [9] та 6.1 [10] $A_{ii} = \mathcal{G}_i$ – дискретно нормовані кільця, або однорядні кільця Кете, A_{ij} – циклічний лівий A_{ii} і циклічний правий A_{jj} – модуль.

Лема 2 [6]. Мають місце рівності $U_i e_j = 0$, $e_j V_i = 0$ при $i \neq j$ і $U_i e_i = U_i$, $e_i V_i = V_i$ ($i, j = 1, \dots, n$).

Лема 3 [6]. Простий модуль U_k (V_k) входить в прямий розклад модуля $e_i R / e_i R^2$ ($R e_j / R^2 e_j$) тоді і тільки тоді, коли $e_i R^2 e_k$ ($e_k R^2 e_i$) строго міститься в $e_i R e_k$ ($e_k R e_i$).

Твердження 1 [8]. Для нетерових кілець єдиний правий максимальний A_{jj} – підмодуль в A_{ij} співпадає з єдиним лівим максимальним A_{ii} – підмодулем в A_{ij} .

Нагадаємо, що сагайдак називається **незв'язним**, якщо множину його точок можна розбити на дві множини, які не перетинаються і між якими немає стрілок.

У протилежному випадку сагайдак називається **зв'язним**.

Орієнтований граф називається **сильнозв'язним**, якщо із будь-якої його точки в іншу є шлях.

Якщо в сагайдаку відкинути петлі, то він називається **базовим**.

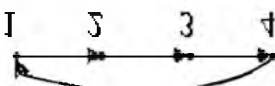
В роботі [11] описані нетерові бірядні кільця з чотирьохточковим ациклічним базовим сагайдаком.

Ми вкажемо будову всіх нетерових бірядних кілець, з сильнозв'язним чотирьохточковим сагайдаком.


Враховуючи теорему 3 отримаємо 54 сильнозв'язних сагайдаки, побудовані на 4-х вершинах, а отже і 54 кільця, двосторонній пірсівський розклад яких має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \mathfrak{g}_1 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & \mathfrak{g}_2 & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & \mathfrak{g}_3 & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & \mathfrak{g}_4 \end{pmatrix}, \text{ з умовами, накладеними на їх компоненти.}$$

Для скорочення записів згрупуємо кільця, які мають однаковий базовий сагайдак. Отримаємо кільця A , з відповідними умовами:

1) – 6) 

- 1). $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{34}A_{41}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
 5) $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 6) $A_{32} = A_{34}A_{41}A_{12}$, 7) $A_{42} = A_{41}A_{12}$, 8) $A_{43} = A_{41}A_{12}A_{23}$,
 9) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{34}A_{41}$, 10) якщо в т. 2 немає петлі, то $R_2 = A_{23}A_{34}A_{41}A_{12}$, 11) якщо в т. 3 немає петлі, то $R_3 = A_{34}A_{41}A_{12}A_{23}$, 12) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{41}A_{12}A_{23}A_{34}$.

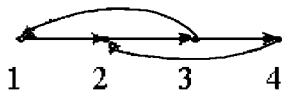
7) – 10) 

- 1). $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{34}A_{41}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
 5) $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 6) $A_{32} = A_{34}A_{41}A_{12}$, 7) $A_{42} = A_{41}A_{12}$, 8) $R_3 = A_{34}A_{43}$,
 9) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{34}A_{41}$, 10) якщо в т. 2 немає петлі, то $R_2 = A_{23}A_{34}A_{41}A_{12}$, 11) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 12) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$,
 13) $A_{13} = 0$ або $R_3 = 0$.

11) – 14) 

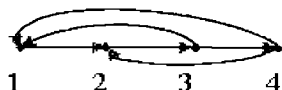
- 1). $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{34}A_{41}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
 5) $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 6) $A_{32} = A_{34}A_{42}$, 7) $A_{43} = A_{42}A_{23}$, 8) $R_2 = A_{23}A_{34}A_{42}$,
 9) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{34}A_{41}$, 10) якщо в т. 3 немає
 петлі, то $R_3 = A_{34}A_{42}A_{23}$, 11) $R_4 = A_{42}A_{23}A_{34}$, 12) $A_{13} = 0$ або $A_{43} = 0$,
 13) $A_{31} = 0$ або $A_{32} = 0$.

15) – 17)



- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
 5) $A_{32} = A_{31}A_{12}$ або $A_{32} = A_{34}A_{42}$, 6) $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 7) $A_{43} = A_{42}A_{23}$,
 8) $A_{41} = A_{42}A_{23}A_{31}$, 9) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{42}A_{23}A_{34}$,
 10) $R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$, 11) $R_3 = A_{31}A_{12}A_{23}$, 12) $A_{21} = 0$ або $A_{24} = 0$,
 13) $A_{13} = 0$ або $A_{43} = 0$.

18)



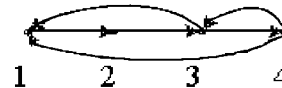
- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
 5) $A_{32} = A_{31}A_{12}$ або $A_{32} = A_{34}A_{42}$, 6) $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 7) $A_{43} = A_{42}A_{23}$,
 8) $R_4 = A_{42}A_{23}A_{34}$, 9) $A_{34}A_{41} = A_{41}A_{12} = 0$, 10) $R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$,
 11) $R_3 = A_{31}A_{12}A_{23}$, 12) $A_{21} = 0$ або $A_{24} = 0$, 13) $A_{13} = 0$ або $A_{43} = 0$.

19) – 26)



- 1). $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
 5) $A_{32} = A_{31}A_{12}$, 6) $A_{41} = A_{43}A_{31}$, 7) $A_{42} = A_{43}A_{31}A_{12}$, 8) якщо в т. 1
 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 9) якщо в т. 2 немає петлі, то $R_2 =$
 $A_{23}A_{31}A_{12}$,
 10) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 11) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{43}A_{34}$,
 12) $A_{41} = 0$ або $A_{21} = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 14) $R_4 = 0$ або $A_{41} = 0$,
 15) $A_{24} = 0$ або $A_{21} = 0$.

27) – 28)



- 1). $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
 5) $A_{32} = A_{31}A_{12}$, 6) $A_{42} = A_{41}A_{12}$, 7) $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 8) $A_{34}A_{41} = A_{43}A_{31} =$
 0 , 9) якщо в т. 2 немає петлі, то $R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$, 10) $R_3 = A_{34}A_{43}$,
 11) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{43}A_{34}$, 12) $A_{41} = 0$ або $A_{21} = 0$,
 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 14) $A_{32} = 0$ або $A_{42} = 0$.

29) – 30)

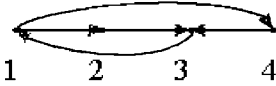


- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$ або $A_{13} = A_{14}A_{43}$, 2) $A_{31}A_{14} = 0$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$,
 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{32} = A_{31}A_{12}$, 6) $A_{41} = A_{43}A_{31}$, 7) $A_{42} = A_{43}A_{31}A_{12}$,

8) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 9) якщо в т. 2 немає петлі, то

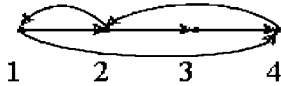
$R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$, 10) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 11) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{43}A_{34}$, 12) $A_{41} = 0$ або $A_{21} = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 14) $R_4 = 0$ або $A_{41} = 0$, 15) $A_{24} = 0$ або $A_{21} = 0$. 16) $A_{14}A_{43} = 0$ або $R_3 = 0$.

31) – 33)



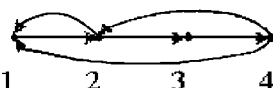
1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$ або $A_{13} = A_{14}A_{43}$, 2) $A_{34} = A_{31}A_{14}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{32} = A_{31}A_{12}$, 6) $A_{41} = A_{43}A_{31}$, 7) $A_{42} = A_{43}A_{31}A_{12}$, 8) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 9) якщо в т. 2 немає петлі, то $R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$, 10) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 11) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{43}A_{34}$, 12) $A_{41} = 0$ або $A_{21} = 0$, 13) $A_{32} = 0$ або $A_{34} = 0$.

34) – 35)



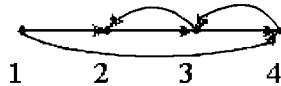
1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{24} = A_{23}A_{34}$ або $A_{24} = A_{21}A_{14}$, 3) $A_{32} = A_{34}A_{42}$, 4) $A_{31} = A_{34}A_{42}A_{21}$, 5) $A_{41} = A_{42}A_{21}$, 6) $A_{43} = A_{42}A_{23}$, 7) $R_1 = A_{12}A_{21}$, 8) $R_2 = A_{21}A_{12}$, 9) якщо в т. 3 немає петлі, то $R_3 = A_{34}A_{42}A_{23}$, 10) $R_4 = A_{42}A_{23}A_{34}$, 11) $A_{13} = 0$ або $A_{43} = 0$, 12) $A_{14}A_{42} = 0$, 13) $R_2 = 0$ або $A_{21}A_{14} = 0$, 14) $R_1 = 0$ або $A_{13} = 0$, 15) $R_1 = 0$ або $A_{41} = 0$, 16) $A_{43} = 0$ або $A_{41} = 0$.

36) – 37)



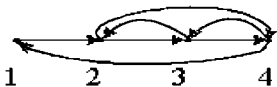
1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{32} = A_{34}A_{42}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 6) $A_{43} = A_{42}A_{23}$, 7) $R_1 = A_{12}A_{21}$, 8) $R_2 = A_{21}A_{12}$, 9) якщо в т. 3 немає петлі, то $R_3 = A_{34}A_{42}A_{23}$, 10) $R_4 = A_{42}A_{23}A_{34}$, 11) $A_{13} = 0$ або $A_{43} = 0$, 12) $A_{41}A_{12} = A_{42}A_{21} = 0$, 13) $A_{31} = 0$ або $A_{32} = 0$, 14) $R_1 = 0$ або $A_{13} = 0$, 15) $A_{43} = 0$ або $A_{42}A_{21} = 0$.

38) – 39)



1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{34}A_{41}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 6) $A_{42} = A_{41}A_{12}$ або $A_{42} = A_{43}A_{32}$, 7) $R_2 = A_{23}A_{32}$, 8) $R_3 = A_{32}A_{23}$ або $R_3 = A_{34}A_{43}$, 9) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{34}A_{41}$, 10) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 11) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 12) $A_{13} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$, 13) $A_{31} = 0$ або $A_{34}A_{43} = 0$, 14) $R_2 = 0$ або $A_{43}A_{32} = 0$, 15) $A_{43}A_{32} = 0$ або $R_4 = 0$, 16) $A_{24} = 0$ або $R_2 = 0$.

40) – 41)



- 1). $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{24}$, 3) $A_{21} = A_{24}A_{41}$, 4) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{24}A_{41}$, 5) $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 6) $A_{42} = A_{41}A_{12}$ або $A_{42} = A_{43}A_{32}$,
 7) $R_2 = A_{23}A_{32}$, 8) $R_3 = A_{32}A_{23}$ або $R_3 = A_{34}A_{43}$, 9) $A_{14} = 0$ або $A_{13} = 0$.
 10) $A_{23}A_{34} = A_{24}A_{43} = A_{32}A_{24} = 0$, 11) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 12) $A_{13} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$, 13) $A_{31} = 0$ або $A_{34}A_{43} = 0$, 14) $R_2 = 0$ або $A_{43}A_{32} = 0$, 15) $A_{43}A_{32} = 0$ або
 $R_4 = 0$, 16) $A_{21} = 0$ або $A_{31} = 0$

42) – 43)



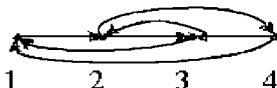
- 1). $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
 5) $A_{23} = A_{31}A_{12}$ або $A_{23} = A_{34}A_{42}$, 6) $A_{41} = A_{43}A_{31}$, 7) $R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$, ,
 8) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 9) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 10) $R_3 = A_{34}A_{43}$,
 11) $A_{42}A_{23} = 0$, , 12) $A_{41} = 0$ або $A_{21} = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$,
 14) $R_4 = 0$ або $A_{41} = 0$, 15) $A_{24} = 0$ або $A_{21} = 0$. 16) $R_3 = 0$ або $A_{34}A_{42} = 0$.

44)



- 1). $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{41} = A_{42}A_{21}$ або $A_{41} = A_{43}A_{31}$, ,
 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{23} = A_{31}A_{12}$ або $A_{23} = A_{34}A_{42}$, 6) $R_1 = A_{12}A_{21}$,
 7) $R_2 = A_{21}A_{12}$, 8) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 9) $A_{23}A_{31} = A_{42}A_{23} = 0$, 10) $R_3 = A_{34}A_{43}$,
 11) $R_2 = 0$ або $A_{31}A_{12} = 0$, 12) $R_1 = 0$ або $A_{42}A_{21} = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$,
 14) $R_1 = 0$ або $A_{13} = 0$, 15) $R_3 = 0$ або $A_{34}A_{42} = 0$, 16) $R_4 = 0$ або
 $A_{43}A_{31} = 0$.

45)



- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{24}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$ або $A_{21} = A_{24}A_{41}$,
 4) $A_{34} = A_{32}A_{24}$, 5) $A_{42} = A_{41}A_{12}$ або $A_{42} = A_{43}A_{32}$, 6) $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$,
 7) $R_2 = A_{23}A_{32}$, 8) $R_3 = A_{32}A_{23}$, 9) $R_4 = A_{41}A_{12}A_{24}$ або $R_4 = A_{43}A_{32}A_{24}$,
 10) $A_{24}A_{41} = A_{31}A_{12} = A_{43}A_{31} = 0$, 11) $A_{14} = 0$ або $A_{34} = 0$, 12) $A_{13} = 0$ або
 $R_3 = 0$, 13) $A_{14} = 0$ або $A_{13} = 0$, 14) $A_{34} = 0$ або $R_3 = 0$, 15) $A_{23}A_{31} = 0$
 або
 $R_2 = 0$, 16) $A_{43}A_{32} = 0$ або $R_2 = 0$.

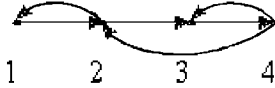
46)



- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{21} = A_{23}A_{31}$ або $A_{21} = A_{24}A_{41}$, 3) $A_{34} = A_{32}A_{24}$
 або $A_{34} = A_{31}A_{14}$, 4) $R_1 = A_{14}A_{41}$, 5) $A_{42} = A_{41}A_{12}$ або $A_{42} = A_{43}A_{32}$,
 6) $R_4 = A_{41}A_{14}$, 7) $R_2 = A_{23}A_{32}$, 8) $R_3 = A_{32}A_{23}$, 9) $A_{12}A_{24} = 0$,

- 10) $A_{24}A_{41} = A_{31}A_{12} = A_{43}A_{31} = 0$, 11) $R_1 = 0$ або $A_{14}A_{43} = 0$,
 12) $A_{13} = 0$ або $R_3 = 0$, 13) $R_1 = 0$ або $A_{24}A_{41} = 0$, 14) $A_{32}A_{24} = 0$ або $R_3 = 0$,
 15) $A_{23}A_{31} = 0$ або $R_2 = 0$, 16) $A_{43}A_{32} = 0$ або $R_2 = 0$, 17) $R_4 = 0$ або $A_{41}A_{12} = 0$,
 18) $A_{31}A_{14} = 0$ або $R_4 = 0$.

47) – 48)



- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 4) $A_{31} = A_{34}A_{42}A_{21}$,
 5) $A_{32} = A_{34}A_{42}$, 6) $A_{41} = A_{42}A_{31}$, 7) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{21}$,
 8) $R_2 = A_{21}A_{12}$, 9) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 10) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 11) $A_{42}A_{23} = 0$, 12) $A_{13} = 0$
 або $R_1 = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 14) $A_{41} = 0$ або $R_1 = 0$, 15) $A_{32} = 0$
 або
 $R_3 = 0$.

49) – 51)



- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 4) $A_{31} = A_{32}A_{21}$,
 5) $A_{41} = A_{43}A_{32}A_{21}$, 6) $A_{42} = A_{43}A_{32}$, 7) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{21}$,
 8) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{43}A_{34}$, 9) $R_2 = A_{21}A_{12}$ або $R_2 = A_{23}A_{32}$,
 10) $R_3 = A_{32}A_{23}$ або $R_3 = A_{34}A_{43}$, 11) $A_{13} = 0$ або $R_1 = 0$, 12) $A_{13} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$,
 13) $A_{31} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$, 14) $A_{31} = 0$ або $R_1 = 0$, 15) $A_{24} = 0$ або $A_{23}A_{32} = 0$,
 16) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 17) $A_{42} = 0$ або $R_4 = 0$, 18) $A_{42} = 0$ або $A_{23}A_{32} = 0$.

52)



- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 4) $A_{31} = A_{34}A_{41}$,
 5) $A_{32} = A_{34}A_{41}A_{12}$, 6) $A_{42} = A_{41}A_{12}$, 7) $R_1 = A_{12}A_{21}$, 8) $R_2 = A_{21}A_{12}$,
 9) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 10) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 11) $A_{31} = 0$ або $R_3 = 0$, 12) $A_{13} = 0$ або
 $R_1 = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 14) $R_2 = 0$, або $A_{42} = 0$.

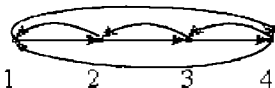
53)



- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 4) $A_{31} = A_{32}A_{21}$ або
 $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 5) $A_{42} = A_{41}A_{12}$ або $A_{42} = A_{43}A_{32}$, 6) $R_1 = A_{12}A_{21}$,
 7) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 8) $A_{41}A_{12} = 0$ або $A_{21}A_{12} = 0$, 9) $R_2 = A_{21}A_{12}$ або $R_2 = A_{23}A_{32}$,
 10) $R_3 = A_{32}A_{23}$ або $R_3 = A_{34}A_{43}$, 11) $A_{13} = 0$ або $R_1 = 0$, 12) $A_{13} = 0$ або
 $A_{32}A_{23} = 0$, 13) $A_{31} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$, 14) $A_{31} = 0$ або $R_1 = 0$, 15) $A_{24} = 0$
 або $A_{23}A_{32} = 0$, 16) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 17) $A_{34}A_{41} = 0$ або $A_{34}A_{43} = 0$,

18) $R_4 = 0$ або $A_{43}A_{32} = 0$, 19) $A_{43}A_{32} = 0$ або $A_{23}A_{32} = 0$.

54)



- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$ або $A_{13} = A_{14}A_{43}$, 2) $A_{24} = A_{23}A_{34}$ або $A_{24} = A_{21}A_{14}$,
 3) $A_{31} = A_{32}A_{21}$ або $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 4) $A_{42} = A_{41}A_{12}$ або $A_{42} = A_{43}A_{32}$,
 5) $R_1 = A_{12}A_{21}$ або $R_1 = A_{14}A_{41}$, 6) $R_2 = A_{21}A_{12}$ або $R_2 = A_{23}A_{32}$,
 7) $R_3 = A_{32}A_{23}$ або $R_3 = A_{34}A_{43}$, 8) $R_4 = A_{41}A_{14}$ або $R_4 = A_{43}A_{34}$,
 9) $A_{12}A_{21} = 0$ або $A_{12}A_{23} = 0$, 10) $A_{12}A_{21} = 0$ або $A_{32}A_{21} = 0$,
 11) $A_{12}A_{23} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$, 12) $A_{32}A_{21} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$,
 13) $A_{23}A_{32} = 0$ або $A_{23}A_{34} = 0$, 14) $A_{23}A_{32} = 0$ або $A_{43}A_{32} = 0$,
 15) $A_{23}A_{34} = 0$ або $A_{43}A_{34} = 0$, 16) $A_{43}A_{32} = 0$ або $A_{43}A_{34} = 0$,
 17) $A_{41}A_{14} = 0$ або $A_{21}A_{14} = 0$, 18) $A_{21}A_{14} = 0$ або $A_{21}A_{12} = 0$,
 19) $A_{41}A_{12} = 0$ або $A_{41}A_{14} = 0$, 20) $A_{21}A_{14} = 0$ або $A_{21}A_{12} = 0$,
 21) $A_{14}A_{41} = 0$ або $A_{14}A_{43} = 0$, 22) $A_{14}A_{43} = 0$ або $A_{34}A_{43} = 0$,
 23) $A_{34}A_{43} = 0$ або $A_{34}A_{41} = 0$, 24) $A_{34}A_{41} = 0$ або $A_{14}A_{41} = 0$.

Умови для розглядуваних кілець отримуються в ході наступних міркувань. Зупинимось, наприклад, на кільці з сагайдаком

52)



Так як кільце A – нетерове, то за лемою Накаями циклічний бімодуль A_{14} строго включає в себе підмодуль $A_{14}R_4 = R_1A_{14}$. Із точки 1 в точку 4 немає стрілки, отже $\frac{A_{14}}{A_{14}R_4 + A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34}} = 0$ і $A_{14} = A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34}$. Із точки

1 в точку 3 немає стрілки, отже $\frac{A_{14}}{R_1A_{13} + A_{12}A_{23} + A_{14}A_{43}} = 0$ і $A_{13} = A_{12}A_{23} + A_{14}A_{43}$. Із точки 2 в точку 4 немає стрілки, отже $\frac{A_{24}}{A_{21}A_{14} + R_2A_{24} + A_{23}A_{34}} = 0$ і $A_{24} = A_{21}A_{14} + A_{23}A_{34}$.

Маємо $A_{13} = A_{12}A_{23} + (A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34})A_{43}$.

Так як $A_{12}A_{23} \supseteq (A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34})A_{43}$, то

1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$; 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$; 3) $A_{24} = A_{23}A_{34}$.

Аналогічно 4) $A_{31} = A_{34}A_{41}$; 5) $A_{32} = A_{34}A_{41}A_{12}$; 6) $A_{42} = A_{41}A_{12}$.

В точці 1 немає петлі, тому $\frac{R_1}{R_1^2 + A_{12}A_{21} + A_{13}A_{31} + A_{14}A_{41}} = 0$. Тоді за лемою Накаями $R_1 = A_{12}A_{21} + A_{13}A_{31} + A_{14}A_{41}$. Враховуючи рівності 1)-6) отримаємо:

7) $R_1 = A_{12}A_{21}$. Повністю аналогічно

8) $R_2 = A_{21}A_{12}$; 9) $R_3 = A_{34}A_{43}$; 10) $R_4 = A_{43}A_{34}$.

За лемою 1 модуль P_1 – ланцюговий.

$$P_1 R^2 = (R_1, A_{12}R_2, A_{13}, A_{14}). \quad P_1 R^3 = (R_1^2 + A_{13}A_{31}, A_{12}R_2, A_{13}R_3, A_{14}).$$

Якщо $R_1 \neq 0$ і $A_{13} \neq 0$, то за лемами 2 і 3 $\frac{P_1 R^2}{P_1 R^3} = u_1 + u_3$, що

неможливо для ланцюгового модуля.

Отже, маємо 11) $R_1=0$ або $A_{13}=0$. Аналогічно, розглянувши ланцюговий модуль P_3 і його підмодулі, отримаємо 12) $R_3=0$ або $A_{31}=0$. Ті ж міркування щодо лівих ланцюгових модулів Q_2 і Q_4 приводять до умов: 13) $A_{24}=0$ або $R_4=0$ і 14) $R_2=0$ або $A_{42}=0$.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Fuller K.R. Weakly symmetric rings of distributive module type // Comm. in Algebra. – 1977. – № 5. – P. 997-1008.
2. Кириченко В.В., Костюкевич П.П. Бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1986. – Т.38, № 6. – С. 718-723.
3. Bass H. Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 95. – P. 466-488.
4. Michler G. Structure of semi-perfect hereditary noetherian rings // J.Algebra. – 1969. – V. 13. – P. 327-344.
5. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. Конечномерные алгебры. – К.: Вища шк., 1980. – 192 с.
6. Кириченко В.В. Обобщенно однорядные кольца // Мат. сб. – 1976. – Т. 99, № 4. – С. 559-581.
7. Morita K., Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. 1958. – V. 6. – P. 83-142.
8. Кириченко В.В., Яременко Ю.В. Нетеровы бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1988. – Т.40, №4. – С. 435-440.
9. Кириченко В.В. Кольца и модули. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1981. – 64 с.
10. Кириченко В.В. Обобщенно однорядные кольца // К., 1975. – 58 с. – (Препр. АН Украины. Ин-т математики; 75.1).
11. Яременко Ю.В. Мінори четвертого порядку нетерових бірядних кілець з ациклічним базовим сагайдаком // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. – 2001. – №1. – С. 67-74.

Кіровоградський державний педагогічний
університет ім. В.Винниченка

Надійшло 20 жовтня 2004 р.